I. INTRODUCTION ET DEFINITION

Tous les nombres positifs ont une racine carrée, par exemple, 9 a pour racine 3 et –3 et 2 a pour racine $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Par contre, aucun réel négatif n'a de racine (réelle).
C'est pour pallier à cette discrimination que furent créer les nombres complexes.

Le nombre *i* :

On appelle ***i*** un nombre dont le carré est –1. On décrète que ***i*** est la racine de -1. Ainsi : $i^2 = -1$
De plus, son opposé $-i$ a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = [(-1) \times i]^2 = (-1)^2 \times i^2 = -1$
Conclusion : Les deux racines de -1 sont deux nombres irréels ***i*** et $-i$.
Le nombre ***i*** est appelé nombre imaginaire.
La forme factorisée de $x^2 + 1$ est $(x + i) . (x - i)$

Définition

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers

Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel.
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite.
  Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels.
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées (a ; b).
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif (c'est-à-dire supérieur à 0).

Définition :

Soit un nombre complexe z .
L'écriture $z = a + ib$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique ou cartésienne du nombre complexe z.
a est appelé partie réelle de z, et b partie imaginaire de z : on note $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.

Remarque

- La partie réelle de z et la partie imaginaire de z sont des nombres réels.

Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow (a ; b) = (a' ; b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$